

INSTABILITE ET FLUX DE CHALEUR DANS LE PROBLEME DE BENARD A DEUX CONSTITUANTS AUX COEFFICIENTS DE SORET POSITIFS

J. K. PLATTEN et G. CHAVEPEYER

Faculté des Sciences, Université de Mons, 7000—Mons, Belgique

(reçu le 26 mars 1975)

Résumé—On traite dans cet article une approximation de l'étude non linéaire du problème de Bénard à deux constituants en tenant compte de l'effet de thermodiffusion. Cette étude est limitée aux cas où le coefficient de thermodiffusion est positif, qui reste jusqu'ici le domaine le moins exploré. Les résultats que nous présentons, sous la forme de la variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh permettent probablement d'expliquer les résultats expérimentaux.

NOTATIONS

$A,$	} coefficients de Fourier;
$A_{m,n},$	
$D,$	coefficient de diffusion isotherme;
$D',$	coefficient de diffusion thermique;
$d,$	épaisseur de la couche liquide;
$N_i,$	fraction massique du constituant i ;
$Nu,$	nombre de Nusselt;
$n,$	perturbation de N_i ;
$Pr,$	nombre de Prandtl;
$Ra,$	nombre de Rayleigh;
$R_{Th},$	nombre de Rayleigh pour le champ de concentration;
$Sc,$	nombre de Schmidt;
$\mathcal{S},$	nombre de Soret;
$T,$	température;
$\mathbf{T},$	période d'oscillation;
$t,$	temps;
$x, z,$	coordonnées spatiales.

Symboles grecs

$\nu,$	viscosité cinématique;
$\vartheta,$	perturbation de température;
$\psi,$	fonction de courant.

INTRODUCTION

LE PROBLEME de Bénard à deux constituants, en y incorporant l'effet de thermodiffusion, a reçu durant ces cinq dernières années, une attention toute particulière, et les publications sur ce sujet sont devenues très nombreuses. Il serait difficile dans cette note de vouloir faire le point de la situation. Une revue de la question faite par Schechter, Velarde et Platten [1] a été publiée récemment, mais n'est déjà plus à jour, car elle se limite aux expériences de laboratoire et à la théorie linéaire. A ce jour, la théorie non linéaire a déjà progressé considérablement (Platten et Chavepeyer [2-4]) et explique en partie les phénomènes nouveaux observés: les oscillations dans le champ de température ainsi qu'un effet d'hystérèse. Il est à noter que ces deux effets inédits ont été prédits ou observés et partiellement

expliqués, uniquement dans les systèmes à coefficient de Soret négatif. Les systèmes à coefficients de Soret positifs ont reçu une attention moindre, essentiellement dû au fait que les expériences préliminaires semblaient plus difficiles à expliquer. Le but de cet article est de faire le rapprochement entre ces expériences que nous rappellerons succinctement et des résultats théoriques que nous avons obtenus très récemment.

Rappelons brièvement les prédictions faites sur le problème de Bénard à deux constituants en y incorporant l'effet de thermodiffusion c'est-à-dire l'apparition d'un gradient de titre sous l'influence du gradient thermique imposé au système (chauffé par le bas). Deux cas peuvent se présenter:

(i) Lorsque le coefficient de thermodiffusion (aussi appelé coefficient de Soret) est négatif, le constituant le plus dense migre vers la paroi chaude, ici la paroi inférieure. Il s'agit d'un effet *stabilisant*, observé à la fois expérimentalement et expliqué par la théorie linéaire de la stabilité hydrodynamique [5-7]. De plus des oscillations dans le champ de température et un effet d'hystérèse ont été observés expérimentalement [8,9]. Ces effets sont expliqués théoriquement, du moins partiellement, grâce à une approche de la théorie non linéaire [2-4], bien qu'une controverse subsiste à ce sujet. En effet, Hurle et Jakeman [10, 17] ne croient pas que les oscillations observées dans le champ de température (et d'ailleurs prédites par la théorie linéaire conformément au principe de surstabilité valable dans ce domaine) pour les systèmes à coefficient de Soret négatif, sont effectivement dues à l'effet de thermodiffusion. L'argument principal est qu'ils ont observé des oscillations même dans les systèmes à coefficients de Soret positifs, là où la théorie linéaire n'en prédit pas. En fait, suite aux calculs développés dans cet article, cet argument, comme nous le verrons dans la suite n'est plus valable.

(ii) Lorsque le coefficient de thermodiffusion est positif, le constituant le plus dense migre vers la paroi froide, qui est la paroi supérieure. On a un effet

déstabilisant. Les expériences du type Schmidt-Milverton effectuées par Legros *et al.* [11, 12] n'ont pas montré d'effet déstabilisant, mais seulement un changement de pente dans la caractéristique de chauffe, attribué à l'apparition de la convection libre, au nombre de Rayleigh critique habituel (environ 1708). La théorie linéaire [6] a cependant permis d'interpréter ce résultat. En effet, la théorie linéaire prédit que le nombre de Rayleigh critique diminue avec le coefficient de Soret (c'est l'effet déstabilisant), mais de plus la théorie linéaire affirme que le nombre d'onde critique lié à la perturbation diminue également et tend rapidement vers zéro. En d'autres termes, la longueur d'onde critique, liée à la taille des cellules de convection, augmente rapidement et tend vers l'infini. Dans les expériences de laboratoires effectuées jusqu'ici à coefficient de Soret positif, celui-ci dépasse toujours, et de loin, la valeur pour laquelle la longueur d'onde critique devient infinie. Dans le cas d'un appareil de géométrie finie, l'interprétation des expériences de Legros *et al.* est la suivante: l'instabilité (naissance de la convection libre) apparaît pour des différences de températures extrêmement faibles (pour fixer les idées, p.ex. $\Delta T \approx 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}$ dans les expériences de Legros). De plus comme il n'y aurait qu'une seule cellule de convection, de très grande taille, occupant l'ensemble de l'appareil, et de faible intensité vu que les nombres de Rayleigh demeurent très petits, le courant de chaleur additionnel, au-delà du point critique, induit par la convection libre, est si faible, qu'il ne provoque pas une variation *mesurable* dans les pentes des caractéristiques de chauffe.

La variation importante de pente, observée au nombre de Rayleigh critique habituel, n'est alors plus attribuée à la naissance de la convection libre, mais soit à l'instabilité du mouvement convectif préexistant, de grande taille et de faible amplitude, (il y aurait en quelque sorte une seconde transition, donnant par exemple naissance à un mouvement multicellulaire accompagné d'un transfert additionnel de chaleur important), soit à une accélération brusque de ce mouvement convectif.

Il faut insister sur le fait qu'à cette époque, il s'agissait là d'une interprétation de manière à faire concorder les expériences et les résultats de la théorie linéaire. Cependant, les résultats théoriques présentés dans cet article, grâce à une approche de la théorie non linéaire, confirment entièrement notre premier point de vue: augmentation du flux de chaleur (nombre de Nusselt) au nombre de Rayleigh voisin du point critique des corps purs.

2. FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME ET RECHERCHE D'ÉTATS STATIONNAIRES A $\mathcal{N} > 0$

Nous n'allons pas dans ce paragraphe donner le détail des équations et de la formulation mathématique. Celle-ci est tout-à-fait classique et peut être trouvée ailleurs [3, 4]. Rappelons simplement que les équations de départ sont les équations de conservation de masse,

de quantité, de mouvement et d'énergie. Elles constituent un système d'équations aux dérivées partielles, auxquelles il faut adjoindre des conditions aux bords et des conditions initiales. On distingue généralement entre deux types de conditions aux bords: des surfaces libres ou des surfaces rigides (voir par ex. [13]). Déjà en ce qui concerne la théorie linéaire de la stabilité, le traitement du problème pour des surfaces rigides est malaisé [14, 6], alors qu'il est assez élémentaire pour des surfaces libres [15]. C'est pourquoi dans la théorie non linéaire, nous commençons par ne considérer que des surfaces libres. Dans ce cas, nous pouvons alors développer la fonction de courant ψ , la perturbation de température ϑ et la perturbation de la fraction massique n , en double série de Fourier à coefficients dépendant du temps (pour plus de détails, voir [4]).

Nous écrivons par exemple pour la fonction de courant

$$\psi(x, z, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{m,n}(t) \cdot \sin\left(m\pi \frac{d}{L} x\right) \sin(n\pi z). \quad (1)$$

Dans cette expression, x est la coordonnée horizontale, réduite par une longueur caractéristique d ($0 \leq x \leq L/d$) tandis que z est la coordonnée verticale réduite par la même longueur caractéristique d qui est d'ailleurs l'épaisseur de la couche, si bien que $0 \leq z \leq 1$.

Des expressions similaires à (1) sont écrites pour ϑ et n . Ce développement est alors substitué dans les équations de départ, ce qui permet, par une méthode de Galerkin d'obtenir les équations d'évolution pour chaque coefficient de Fourier. On se trouve alors face à un système d'équations différentielles ordinaires, qui peuvent être intégrées numériquement par des méthodes du type Runge-Kutta, pour autant que l'on se donne des conditions initiales. Pour obtenir ces résultats numériques, les développements du type (1) doivent être tronqués, mais bien souvent la convergence des résultats est rapide et on peut se limiter à peu de coefficients [4]. En fait dans la théorie linéaire, on ne fait rien d'autre que retenir trois coefficients, un pour chaque variable.

Dans une théorie non linéaire, la "représentation minimale" est une représentation à 5 coefficients: un pour la fonction de courant ψ , deux pour ϑ et deux pour n . Cette représentation a déjà été utilisée avec succès [3] et a permis p.ex. de reproduire une boucle d'hystérèse dans le plan des variables $Nu-Ra$, où Nu est le nombre de Nusselt et Ra le nombre de Rayleigh. Bien entendu les valeurs numériques de Nu sont entachées d'une erreur, estimée à 15 pour cent. Mais cette erreur peut être considérée comme raisonnable si l'on s'attache à comprendre les phénomènes observés plutôt qu'à les décrire quantitativement. Une représentation à 16 coefficients de Fourier n'améliore pas sensiblement les résultats, tandis que 56 coefficients fournissent des valeurs qui restent inchangées si on augmente le nombre de coefficients même jusque 120. L'avantage d'utiliser la représentation minimale est qu'il est possible de faire des calculs analytiques. Il est aisé d'écrire le système des cinq équations différentielles et de trouver l'état stationnaire. Par exemple, si on

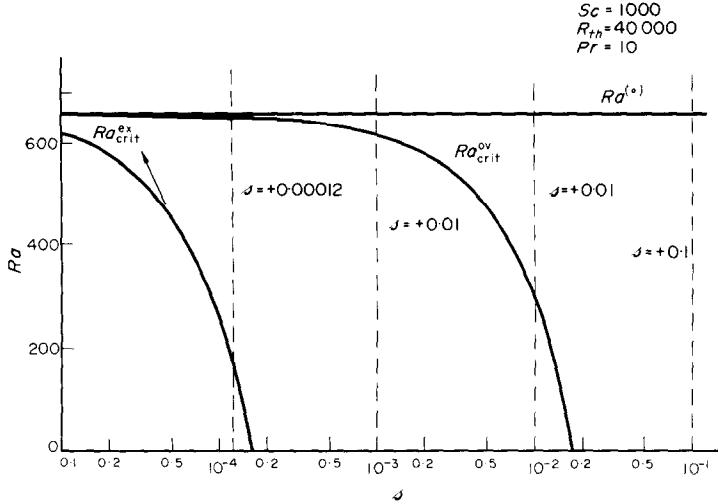


FIG. 1. Variation des nombres de Rayleigh critiques en fonction du nombre de Soret.

écrit pour la fonction de courant

$$\psi(x, z, t) = A(t) \sin\left(\pi \frac{d}{L} x\right) \cdot \sin(\pi z)$$

alors nous avons montré [3] qu'à l'état stationnaire, le coefficient A était donné soit par

$$A = 0 \quad (\text{état de repos})$$

ou par (pour un état convectif)

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{8} = & \frac{3}{2} \frac{1}{Pr^2} \left[\frac{Ra}{Ra^{(0)}} - \left(1 + \frac{Pr^2}{Sc^2}\right) \right] \\ & \pm \sqrt{\left\{ \frac{9}{4} \frac{1}{Pr^4} \left[\frac{Ra}{Ra^{(0)}} - \left(1 + \frac{Pr^2}{Sc^2}\right) \right]^2 \right.} \\ & \left. + \frac{Ra - Ra_{ex}^{crit}}{Ra^{(0)}} \cdot \frac{9}{Sc^2 \cdot Pr^2} \right\}} \quad (2) \end{aligned}$$

avec bien entendu $A^2 > 0$.

Dans cette expression Pr est le nombre de Prandtl (ν/κ), Sc le nombre de Schmidt (ν/D), $Ra^{(0)}$ le nombre de Rayleigh critique caractéristique des corps purs

$$\left(Ra^{(0)} = \frac{27\pi^4}{4} \simeq 657.5 \right)$$

et Ra_{ex}^{crit} est le nombre de Rayleigh critique pour les mélanges binaires dans le cas où le principe d'échange des stabilités est valable. Il est donné par la théorie linéaire [15]

$$Ra_{ex}^{crit} = Ra^{(0)} - R_{Th} \cdot \mathcal{S} \cdot \left(\frac{Sc + Pr}{Pr} \right) \quad (3)$$

où R_{Th} est l'équivalent du nombre de Rayleigh calculé pour le champ de concentration au lieu du champ de température et où \mathcal{S} est ce que nous avons appelé le nombre de Soret défini par

$$\mathcal{S} = \frac{D'}{D} \cdot \Delta T$$

(D' : coefficient de diffusion thermique
 D : coefficient de diffusion isotherme).

On voit donc que pour $\mathcal{S} > 0$, on ne peut avoir de solution convective pour $Ra < Ra_{ex}^{crit} < Ra^{(0)}$ (c'est-à-dire il n'existe pas de A^2 positif). Pour $Ra > Ra_{ex}^{crit}$ il n'y a que la solution avec le signe + à considérer dans l'équation.

A la Fig. 1, nous représentons, dans le plan ($Ra - \mathcal{S}$) Ra_{ex}^{crit} , $Ra^{(0)}$ et Ra_{over}^{crit} , où Ra_{over}^{crit} est la valeur critique du nombre de Rayleigh dans le cas où il y a "sur-stabilité" (overstability). Celui-ci est donné conformément à la théorie linéaire [15]. En fait ce dernier nombre de Rayleigh n'est pas tellement important à $\mathcal{S} > 0$, vu qu'il est toujours plus grand que Ra_{ex}^{crit} . Les autres nombres sans dimensions ont été fixés une fois pour toute.

 Tableau 1. $\mathcal{S} = +0.00012$

Ra	T_{Nu}	$\langle Nu \rangle$
$Ra < Ra_{ex}^{crit} = 172$	∞	1.00000 (repos)
300	∞	1.00007
400	∞	1.00018
500	140 (?)	1.00042
600	76 (?)	1.0015
650	39	1.0090
$Ra^{(0)} = 657.5$	—	—
700	10	1.123
850	5	1.45

Pour différentes valeurs de \mathcal{S} et de Ra , et connaissant Ra_{ex}^{crit} , on peut alors tabuler les valeurs de $(A^2/8)$ [équation (2)]. Connaissant alors la valeur de l'amplitude du mouvement convectif, ou peut calculer sa contribution au nombre de Nusselt, qui rappelons-le, vaut 1 en l'absence de convection.

Une étude antérieure [3] a montré que

$$Nu - 1 = \frac{2 Pr^2 (A^2/8)}{3 + Pr^2 (A^2/8)} \quad (4)$$

A la Fig. 2, nous représentons $(Nu - 1)$ en fonction de Ra ($0 \leq Ra \leq 1500$) pour 3 valeurs de \mathcal{S} .

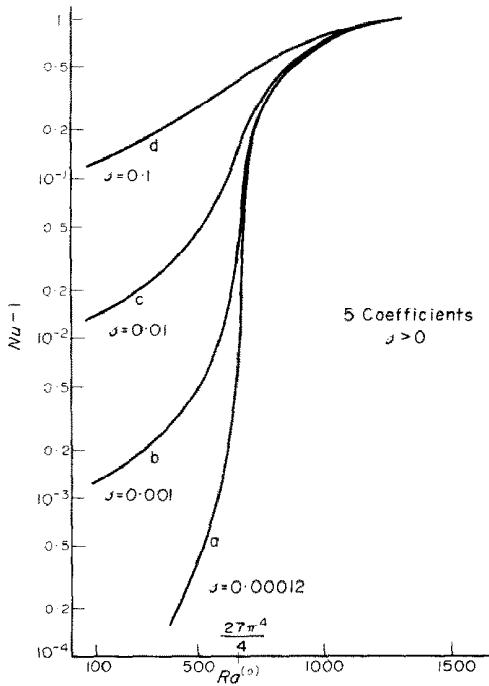


FIG. 2. Variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh.

Pour $\mathcal{S} = +0.00012$ (courbe a), $Ra_{ex}^{crit} = 172$ d'après la Fig. 1. Donc aussi longtemps que Ra reste inférieur à 172, $Nu - 1 = 0$; comme le montre la courbe (a) de la Fig. 2, la contribution convective à Nu reste très faible pour $Ra < 500$ qui est quand même environ $3 \times Ra_{ex}^{crit}$. Cette contribution est largement en dessous de 10^{-3} et n'est sûrement pas mesurable expérimentalement. A $Ra = 600$, cette contribution n'est que de 0.00147, tandis qu'à $Ra = 650$ elle est de 0.00901, c'est-à-dire à peine 1 pour cent. Par contre à $Ra = 700$, cette contribution devient 0.1234 (12 pour cent) et devient donc parfaitement mesurable.

En fait la courbe (a) présente un point d'inflexion voisin de $Ra^{(0)} = 657.5$ et la contribution convective à Nu , c'est-à-dire $Nu - 1$, passe de 0.005 à 0.10 dans un intervalle de Ra de 20 unités seulement. En quelque sorte, un expérimentateur mesurant seulement des flux de chaleur et des gradients de température croira à l'état de repos pour $Ra < 650$ et par contre mesurera une contribution convective au flux de chaleur parfaitement décelable pour $Ra > 670$. Il risque de conclure que la naissance de la convection libre est apparue à $Ra = Ra^{(0)} = 657.5$. En fait c'est ce qu'il s'est passé initialement dans les expériences de Legros où, en généralisant notre argumentation au cas des surfaces rigides, il a été conclu des expériences de laboratoire du type Schmidt-Milverson, que le système était au repos si $Ra < 1708$ et en convection si $Ra > 1708$, et cela en désaccord avec la théorie linéaire. Notre approche non linéaire permet de réconcilier les deux. Aussi longtemps que $Ra < Ra_{ex}^{crit}$ (ici 172), le système est au repos correspondant à $Nu - 1 = 0$. Dès que $Ra > Ra_{ex}^{crit} = 172$, $Nu - 1 \neq 0$, mais reste petit et non mesurable (c'est-à-dire $Nu - 1 \approx 10^{-2}$ p.ex.) pour autant

que $Ra_{ex}^{crit} < Ra < Ra^{(0)}$, c'est-à-dire dans notre exemple $172 < Ra < 657.5$. Ensuite, brusquement, dès que $Ra > Ra^{(0)}$ il y a un saut net dans la valeur de $Nu - 1$, et tel que la contribution convective devient mesurable.

Les courbes tracées pour $\mathcal{S} = 10^{-3}$ et 10^{-2} (courbes b et c) montrent le même phénomène. Notons que les valeurs numériques adoptées pour les différents paramètres sont parfaitement réalistes et correspondent par exemple à des systèmes du type "eau-alcool".

On peut se demander si ce point d'inflexion ne se fait pas pour $Ra \approx Ra_{over}^{crit}$, plutôt que $Ra \approx Ra^{(0)}$. En fait pour \mathcal{S} petit, $Ra_{over}^{crit} \approx Ra^{(0)}$ comme le montre la Fig. 1, et on ne peut donc pas discerner où se fait ce saut brusque dans Nu . Cependant pour $\mathcal{S} = 10^{-2}$, $Ra_{over}^{crit} \approx 300$ (cf. Fig. 1) et la Fig. 2 montre (courbe c) qu'à $Ra = 300$, $Nu - 1 \approx 0.02$, c'est-à-dire très faible; le point d'inflexion reste situé aux environs de $Ra \approx 600$.

3. SUR L'EVENTUALITE D'OSCILLATIONS A $\mathcal{S} > 0$

Les résultats présentés dans ce paragraphe ont été obtenus par intégration numérique directe des équations différentielles ordinaires décrivant l'évolution temporelle de chaque coefficient de Fourier. Nous ne reproduisons pas ici ce système d'équations qui a déjà été donné ailleurs [3, 4], aussi bien pour le développement tronqué à cinq coefficients que pour un nombre quelconque de coefficients. Notons que nous avons toujours pris, dans les expériences numériques décrites dans ce paragraphe, des conditions initiales correspondant à l'état de repos légèrement perturbé.

Dans un article antérieur [4], nous avons déjà obtenu quelques résultats fragmentaires à $\mathcal{S} > 0$, mais à ce moment on ignorait l'existence des résultats du paragraphe 2 qui ont motivés une étude plus approfondie que celle présentée précédemment (section 4.d et section 4.e de [4]). Rappelons brièvement ces résultats fragmentaires (i) lorsque Ra est voisin de Ra_{ex}^{crit} , on retrouve les résultats de la théorie linéaire, c'est-à-dire la perturbation initiale décroît (resp. croît) lorsque Ra est inférieur (resp. supérieur) à Ra_{ex}^{crit} , et cette décroissance ou croissance est monotone conformément au principe d'échange des stabilités valable à $\mathcal{S} > 0$, et (ii) lorsque $Ra \gg Ra_{ex}^{crit}$ (p.ex. $Ra = 2630 \approx 15 \times Ra_{ex}^{crit}$ à $\mathcal{S} = +0.00012$) des oscillations dans le nombre de Nusselt sont observées. Leur période, T_{Nu} , est 1.5 unités réduites, et leur amplitude initiale est proportionnelle à \mathcal{S} . Ces oscillations sont de nature transitoire; leur amplitude diminue au cours du temps, et finalement elles disparaissent. Nous avons été d'abord surpris d'observer des oscillations à $\mathcal{S} > 0$ et notre première conclusion était qu'il n'y avait aucune raison d'extrapoler le principe d'échange de stabilité loin du point critique.

Les expériences numériques nouvelles que nous avons effectuées sont destinées à voir si les oscillations observées à $Ra \gg Ra^{(0)}$ subsistent dans le domaine $Ra_{ex}^{crit} < Ra < Ra^{(0)}$. Ces expériences sont résumées au tableau 1. Pour des nombres de Rayleigh voisins, ou nettement supérieur, au point critique il n'y a pas d'oscillations dans le nombre de Nusselt. Par contre, pour des nombres de Rayleigh voisins de $Ra^{(0)}$ (p.ex.

$Ra = 650$) ou nettement supérieur (p.ex. 700 et 850), des oscillations très nettes sont observées; leur amplitude est décroissante et pour des temps longs, Nu atteint une valeur stationnaire. Pour des valeurs de Ra légèrement inférieures à $Ra^{(0)}$ (p.ex. $Ra = 600$ ou 500) on ne peut pas définir avec certitude la présence d'oscillations, et cela pour deux raisons. D'abord leur amplitude est très faible et ne s'observe pas sur les graphiques directement imprimés par l'ordinateur. Il faut aller lire les valeurs numériques de Nu à chaque intervalle de temps et décider d'oscillations éventuelles d'après les décimales lointaines! De plus on n'observe que deux ou trois maxima dans $Nu(t)$ avant d'atteindre l'état stationnaire. C'est la raison pour laquelle nous avons mis un point d'interrogation après la valeur numérique de la période pour $Ra = 500$ et 600. On peut cependant affirmer réellement qu'il n'y a pas d'oscillations si $Ra < 500$ (alors que $Ra^{crit} = 172$) et que leur existence ne peut être mise en doute lorsque $Ra > Ra^{(0)}$, c'est-à-dire après de $(Nu-1)$ ait subi l'augmentation brusque représentée à la Fig. 2.

4. CONCLUSIONS

En conclusion, l'analyse non linéaire rend compte de ce que l'on pourrait appeler "une seconde transition" aux nombres de Soret positifs. Cette "seconde transition" se manifeste sous la forme d'une augmentation brusque du nombre de Nusselt accompagnée d'oscillations. Elle apparaît à un nombre de Rayleigh égal à la valeur critique caractéristique des corps purs, alors que la première instabilité apparaît bien avant et que celle-ci n'est pas accompagnée d'un accroissement mesurable de Nu . Cette constatation est en parfait accord avec les résultats de Legros sur les systèmes à coefficient de Soret positif. En effet, Legros observe que de tels systèmes se comportent comme des corps purs.

Au voisinage de ce second "point critique", le fait que des oscillations transitoires apparaissent, est peu surprenant. En effet, il est possible de déterminer le nouvel état qui prévaut au-delà de la première instabilité à $Ra = Ra_{ex}^{crit}$. Si on parvenait à faire l'analyse linéaire de stabilité de ce nouvel état (c'est difficile parce que les profils sont à deux dimensions et ne permettent plus l'analyse en modes normaux) nous croyons que ce nouvel état convectif deviendrait linéairement instable à un nombre de Rayleigh voisin de $Ra^{(0)}$, et de plus, nous croyons qu'on parviendrait à exprimer un critère de surstabilité (oscillations au point critique), car les équations seraient du type Orr-Sommerfeld vu qu'il y a un mouvement de base pré-existant.

Les systèmes eau-méthanol, eau-isopropanol, ont un coefficient de Soret qui change de signe avec la concentration. Il est négatif aux faibles concentrations en alcool (p.ex. pour des fractions massiques inférieures à 0.2) et positif aux faibles concentrations en eau (p.ex. [16]). Les oscillations observées expérimentalement [8, 9] dans les systèmes eau-alcool à faible concentration en alcool ($\mathcal{S} < 0$), ont été mises en doute par Hurle et Jakeman [10, 17], ou plutôt, Hurle et Jakeman ont mis en doute le rôle de l'effet Soret, le

fait que cet effet pouvait être responsable de leur apparition. Ils ont d'ailleurs tenté d'expliquer ces oscillations par un mauvais parallélisme des surfaces limites! Mais leur argument principal est qu'ils observent dans leurs expériences des oscillations dans toute la gamme de concentration, donc quel que soit le signe du coefficient de Soret. Ils en déduisent dès lors, vu que la théorie linéaire ne prédit pas d'oscillations à $\mathcal{S} > 0$ (échange des stabilités) que ces oscillations ne peuvent être dues à l'effet Soret à $\mathcal{S} > 0$, et par extension à tout \mathcal{S} . En fait, dans leurs expériences, le flux de chaleur fourni au système est programmé dans le temps et il augmente avec le temps. Conformément à nos résultats du section 3 lorsque le second point critique est atteint des oscillations apparaissent. Il est donc normal que Hurle et Jakeman les observent et leurs expériences, plutôt que de nier le rôle de l'effet Soret, ne font au contraire, que confirmer la responsabilité de l'effet Soret dans l'apparition des oscillations: à $\mathcal{S} < 0$, elles apparaissent conformément à la théorie linéaire (et non linéaire d'ailleurs) tandis qu'à $\mathcal{S} > 0$, elles apparaissent conformément à la théorie non linéaire seule, à des valeurs du nombre de Rayleigh voisin du point critique des corps purs. Nous suggérons donc aux expérimentateurs de vérifier dans des expériences à $\mathcal{S} > 0$ où on maintient constant le flux de chaleur fourni au système, l'absence d'oscillations pour $Ra_{ex}^{crit} < Ra < Ra^{(0)}$ et leur apparition pour $Ra > Ra^{(0)}$ c'est-à-dire au voisinage du second "point critique".

Nous voudrions terminer en indiquant une faiblesse de l'étude présente: elle se rapporte uniquement aux cas de deux surfaces libres, ce qui en soi est parfaitement justifiable. Mais malheureusement, la théorie linéaire prédit dans ce cas que k^{crit} reste constant (donc λ^{crit}): il n'y a donc pas variation de la taille (donc du nombre) des cellules de convection. Cette étude est donc limitée à une seule cellule de taille imposée (en fait de taille critique) et on s'est attaché à l'amplitude du mouvement convectif. Il est clair que dans les expériences de Legros en surfaces rigides, à la fois l'amplitude du mouvement convectif à l'intérieur d'une cellule et le nombre de cellules de convection, influence le nombre de Nusselt. Mais théoriquement l'étude du problème en surfaces rigides requiert d'autres techniques. Une étude utilisant la méthode des différences finies est actuellement en cours.

Remerciement—Nous remercions vivement les Professeurs I. Prigogine et P. Glansdorff pour l'intérêt qu'ils nous ont manifesté durant ce travail. L'un de nous (G.C.) remercie l'institut pour l'Encouragement de la Recherche Scientifique pour l'Industrie et l'Agriculture (I.R.S.I.A., Bruxelles) pour une bourse de recherche.

REFERENCES

1. R. S. Schechter, M. G. Velarde et J. K. Platten, The two-component Bénard problem, *Adv. Chem. Phys.* **26**, 267 (1974).
2. J. K. Platten, G. Chavepeyer et J. Tellier, Finite amplitude oscillatory motions in the two component Bénard problem, *Phys. Lett.* **44A**(7), 479 (1973).
3. J. K. Platten et G. Chavepeyer, An hysteresis loop in the two component Bénard problem, *Int. J. Heat Mass Transfer* **18**, 1071 (1975).

4. J. K. Platten et G. Chavepeyer, Nonlinear two dimensional Bénard convection with Soret effect: free boundaries, *Int. J. Heat Mass Transfer*. To be published.
5. J. Cl. Legros, D. Rasse et G. Thomaes, Convection and thermal diffusion in a solution heated from below, *Chem. Phys. Lett.* **4**, 632 (1970).
6. J. Cl. Legros, J. K. Platten et P. Poty, Stability of a two-component liquid layer heated from below, *Physics Fluids* **15**, 1383 (1972).
7. J. K. Platten et G. Chavepeyer, Soret driven instability, *Physics Fluids* **15**, 1555 (1972).
8. J. K. Platten et G. Chavepeyer, Oscillations in a water-ethanol liquid layer heated from below, *Phys. Lett.* **40A**, 287 (1972).
9. J. K. Platten et G. Chavepeyer, Oscillatory motion in Bénard cell due to the Soret effect, *J. Fluid Mech.* **60**(2), 305 (1973).
10. D. T. J. Hurle et G. Jakeman, Natural oscillations in heated fluid layers, *Phys. Lett.* **43A**, 127 (1973).
11. J. Cl. Legros, Contribution à l'étude de la thermo-diffusion et à la stabilité hydrodynamique des systèmes binaires. Thèse de doctorat, Faculté des Sciences, Université Libre de Bruxelles (1971).
12. J. Cl. Legros, W. A. Van Hook et G. Thomaes, Convection and thermal diffusion in a solution heated from below, (a) *Chem. Phys. Lett.* **1**, 696 (1968); (b) *Chem. Phys. Lett.* **2**, 249 (1968).
13. S. Chandrashekar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford University Press, Oxford (1961).
14. R. S. Schechter, I. Prigogine et J. Hamm, Thermal diffusion and convective stability, *Physics Fluids* **15**, 379 (1972).
15. J. K. Platten, Le problème de Bénard dans les mélanges: cas de surfaces libres, *Bull. Acad. R. Belg. Cl. Sci.* **57**, 669 (1971).
16. P. Poty, J. Cl. Legros et G. Thomaes, Thermal diffusion in some binary liquid mixtures by the flowing cell method, *Z. Naturf.* **29a**, 1915 (1974).
17. D. T. J. Hurle et E. Jakeman, Thermal oscillations in convecting fluids, *Physics Fluids* **16**(12), 2056 (1973).

INSTABILITY AND HEAT FLOW IN THE TWO-CONSTITUENT BÉNARD PROBLEM WITH POSITIVE SORET COEFFICIENTS

Abstract—In this paper, we consider an approximation to the nonlinear analysis of the two component Bénard problem, taking into account thermal diffusion. The present study is restricted to the case of positive thermal diffusion coefficient: no complete calculations were indeed reported till now, in this domain. The results presented in this paper are essentially the variation of the Nusselt number versus the Rayleigh number for different thermal diffusion factors. The experimental results can be explained by the use of the theoretical results.

INSTABILITÄT UND WÄRMEFLUSS IM ZWEI-KOMPONENTEN BÉNARD-PROBLEM MIT POSITIVEN SORET-KOEFFIZIENTEN

Zusammenfassung—In diesem Artikel wird eine Näherung des nichtlinearen Bénard-Problems mit zwei Komponenten behandelt. Die Thermodiffusion ist berücksichtigt. Die Untersuchung ist auf die Fälle mit positivem Koeffizienten der Thermodiffusion beschränkt; dies ist der Bereich, über den bis jetzt die wenigsten Kenntnisse vorliegen. Die Ergebnisse werden in Form von Variationen der Nusselt-Zahl veröffentlicht mit der Rayleigh-Zahl als unabhängiger Veränderlicher. Die Ergebnisse erlauben die Deutung der experimentellen Ergebnisse.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ТЕПЛОВЫЙ ПОТОК В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ЗАДАЧЕ БЕНАРА С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ СОРЕ

Аннотация — В статье рассматривается двухкомпонентная задача Бенара в нелинейной постановке с учетом термодиффузии. Рассмотрен только случай положительных коэффициентов термодиффузии: полных расчетов в этой области до настоящего времени, повидимому не проводилось. Результаты работы состоят в получении зависимости числа Нуссельта от числа Рейля и позволяют объяснить экспериментальные данные для различных коэффициентов термодиффузии.